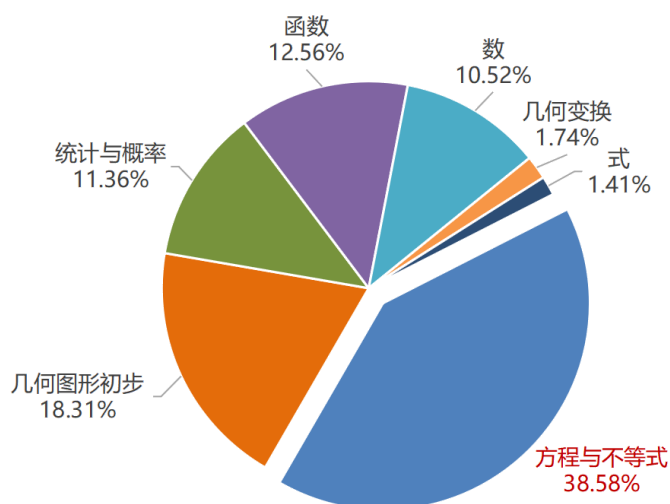


第1讲 含参不等式（组）（一）

一元一次不等式（组）属于人教版第九章的难点为含参方程解情况的分类讨论以及含参不等式的整数解；这部分内容是期末考试的低频考点，故这部分我们分为《二元一次方程（组）与一元一次不等式（组）》、《二元一次方程（组）》、《一元一次不等式（组）》、《含参不等式》、《方程、不等式综合》四个模块。本模块为《含参不等式》，旨在帮助学生在不等式（组）的基础上解决含参问题。

本模块难度较大，适用于一元一次不等式组专题提升，本模块分为含参不等式（组）（一）、含参不等式（组）（二）2讲内容，帮助学生了解含参不等式（组）的常见题型，梳理这部分的解题思路。



一、方程与不等式

|| 例题1

若方程 $x + 3 = 3x - m$ 的解是正数，则 m 的取值范围是_____。

解：解方程得 $x = \frac{m+3}{2}$ ，

∵方程的解为正数，

∴ $\frac{m+3}{2} > 0$ ，

解得 $m > -3$ 。

【教法备注】

用参数表示出方程的解，根据题中方程解的要求列出不等关系，然后解不等式即可。

|| 练习1

1. 关于 x 的方程 $\frac{x-1}{2} - a = \frac{x}{3} + \frac{2a}{3}$ 的解大于33，则实数 a 的取值范围是（ ）

A. $a > 2$

B. $a > 3$

C. $a < 2$

D. $a < 3$

【答案】 B

【解析】 去分母得： $3x - 3 - 6a = 2x + 4a$ ，

移项，合并同类项得： $x = 10a + 3$ ，

由方程的解大于33，得 $10a + 3 > 33$ ，

解得： $a > 3$ ，

故选B。

【标注】 【知识点】 已知方程（组）解的范围，求参数范围

2. 已知关于 x 的方程 $4(x+2) - 2 = 5 + 3a$ 的解不小于方程 $\frac{(3a+1)x}{3} = \frac{a(2x+3)}{2}$ 的解，求 a 的取值范围。

【答案】 $a \leq -\frac{1}{15}$ 。

【解析】 ∵ $4(x+2) - 2 = 5 + 3a$ ，

∴ $4x + 8 - 2 - 5 - 3a = 0$ ， $4x + 1 - 3a = 0$ ，

$$\begin{aligned}\therefore x &= \frac{3a-1}{4}, \\ \therefore \frac{(3a+1)x}{3} &= \frac{a(2x+3)}{2}, 2(3a+1)x = 3a(2x+3), \\ (6a+2)x &= 6ax+9a, 6ax+2x-6ax = 9a, \\ \therefore x &= \frac{9}{2}a, \\ \text{由题意 } \frac{3a-1}{4} &\geq \frac{9}{2}a, 3a-1 \geq 18a, -15a \geq 1, \\ \therefore a &\leq -\frac{1}{15}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】方程（组）解的情况确定参数的范围

例题2

若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y=-3m+2 \end{cases}$ 的解满足 $x-y > -\frac{3}{2}$, 则 m 的最小整数解为_____.

解： $\begin{cases} 2x+y=4 \text{ ①} \\ x+2y=-3m+2 \text{ ②} \end{cases}$, ①-②得： $x-y=3m+2$, $\therefore$ 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2y=-3m+2 \end{cases}$ 的解满足 $x-y > -\frac{3}{2}$, $\therefore 3m+2 > -\frac{3}{2}$, 解得 $m > -\frac{7}{6}$, $\therefore m$ 的最小整数解为-1, 故选C.

练习2

3. 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x+y=2+3m \\ x+2y=1-6m \end{cases}$ 的解满足 $-3 < x+y < 3$, 若 m 为负整数, 求 $(m+1)^{2016}$.

【答案】0

【解析】由题意得： $x+y=1-m$,

$$\text{得 } -3 < 1-m < 3,$$

$$\text{得 } -2 < m < 4.$$

若 m 为负整数,

$$\therefore m = -1,$$

$$\therefore (m+1)^{2016} = (-1+1)^{2016} = 0.$$

【标注】【知识点】已知方程组解的关系, 求参数范围

已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x - y = 2a - 5 \\ x + 2y = 3a + 3 \end{cases}$ 的解都为正数.

(1) 求 a 的取值范围.

(2) 已知 $a + b = 4$, 且 $b > 0$, $z = 2a - 3b$, 求 z 的取值范围.

【答案】 (1) $a > 1$.

(2) $-7 < z < 8$.

【解析】 (1) $\begin{cases} 3x - y = 2a - 5 \text{ ①} \\ x + 2y = 3a + 3 \text{ ②} \end{cases}$,

① $\times 2 +$ ②得: $x = a - 1$,

② $\times 3 -$ ①得: $y = a + 2$,

$\therefore$ 原方程组的解均为正数,

$$\therefore \begin{cases} a - 1 > 0 \\ a + 2 > 0 \end{cases},$$

$\therefore a > 1$.

(2) $a + b = 4$, $b > 0$,

$\therefore b = 4 - a > 0$,

$\therefore 1 < a < 4$,

$\therefore z = 2a - 3b$,

$\therefore z = 5a - 12$,

$\therefore 1 < a < 4$,

$\therefore -7 < z < 8$.

【标注】【知识点】已知方程(组)解的范围, 求参数范围

二、含参不等式的字母取值范围

1. 已知解集求字母范围

|| 例题3

已知不等式 $3(x-2)+5 > x-k+6$ 的解集为 $x > -1$ ，则 k 的值是_____。

解：解不等式得 $x > \frac{7-k}{2}$ ，
 $\therefore$ 不等式的解集为 $x > -1$ ，
 $\therefore \frac{7-k}{2} = -1$ ，
解得 $k = 9$

【教法备注】

用参数表示出不等式的解集，根据题中已知的解集列出方程，然后解方程即可。

练习3

5. 关于 x 的不等式 $\frac{1}{3}(x-m) > 2-m$ 的解集为 $x > 2$ ，则 m 的值是_____。

【答案】 2

【解析】 由 $\frac{1}{3}(x-m) > 2-m$ 得： $x > 6-2m$ ，
 $\therefore$ 不等式解集为 $x > 2$ ，
 $\therefore 6-2m = 2$ ，解得 $m = 2$ 。

【标注】【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

例题4

如果不等式 $(a-3)x > a-3$ 的解集是 $x > 1$ ，那么 a 的取值范围是_____。

解： $\therefore$ 不等式 $(a-3)x > a-3$ 的解集是 $x > 1$ ，
 $\therefore a-3 > 0$ ，
解得 $a > 3$ 。

【教法备注】

①首先观察不等式和解集的不等号方向是否一致。如果方向一致，说明 x 的系数为正；如果方向相反，说明系数为负。

②其次题目给出的解集应该和自己写出的解集相等，可以据此求出字母的具体数值。

练习4

6. 若关于 x 不等式 $(a+1)x \leq a+1$ 的解集为 $x \geq 1$ ，则 a 的取值范围是_____。

【答案】 $a < -1$

【解析】 由题意得 $a + 1 < 0$ ，即 $a < -1$ 。

【标注】 【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

7. 不等式 $mx - 2 < 3x + 4$ 的解集是 $x > \frac{6}{m-3}$ ，则 m 的取值范围是什么？

【答案】 $m < 3$ 。

【解析】 由 $mx - 2 < 3x + 4$ 可得： $(m - 3)x < 6$ ，

要使此解集为 $x > \frac{6}{m-3}$ ，

那么 $m - 3 < 0$ ，即 $m < 3$ 。

【标注】 【知识点】由不等式（组）的解集求参数的范围

8. 若不等式 $m(x - 2) > x + 1$ 和 $3x - 5 < 0$ 是同解不等式，求 m 的值。

【答案】 $m = -8$ 。

【解析】 由 $3x - 5 < 0$ 得， $x < \frac{5}{3}$ ，

由 $m(x - 2) > x + 1$ 得， $(m - 1)x > 2m + 1$ ，

由于两个不等式同解，则
$$\begin{cases} (m - 1) \cdot \frac{5}{3} = 2m + 1, \\ m - 1 < 0 \end{cases}$$

解得 $m = -8$ ，满足 $m - 1 < 0$ ，

$\therefore m = -8$ 。

【标注】 【知识点】由一个已知不等式的解集求另一个不等式的解集

2. 已知解集求另一个不等式的解集

|| 例题5

已知 a, b 为实数, 若不等式 $ax + b < 0$ 的解集为 $x > \frac{1}{2}$, 则不等式 $b(x - 1) - a < 0$ 的解集为_____.

解: $\because$ 不等式 $ax + b < 0$ 的解集为 $x > \frac{1}{2}$,

$$\therefore a < 0, \text{ 且 } -\frac{b}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore b > 0.$$

解不等式 $b(x - 1) - a < 0$

$$\text{解得 } x < \frac{a + b}{b} = -1.$$

【教法备注】

- ①根据给出的不等式和解集的不等号方向, 判断出字母参数的正负;
- ②根据给出的解集得出字母参数的值或者几个字母之间的数量关系;
- ③将要求的不等式用消元法化简成只含有一个字母的形式;
- ④解该不等式, 注意不等号的方向是否需要改变.

练习5

9. 关于 x 的不等式 $(4a - 3b)x + a > 2b$ 的解集是 $x < \frac{4}{5}$, 则 $ax > b$ 的解集是_____.

【答案】 $x < \frac{21}{22}$

【解析】 $\because$ 不等式解集为 $x < \frac{4}{5}$,

$$\therefore 4a - 3b < 0,$$

$$\therefore x < \frac{2b - a}{4a - 3b},$$

$$\therefore \frac{2b - a}{4a - 3b} = \frac{4}{5}.$$

$$10b - 5a = 16a - 12b,$$

$$22b = 21a,$$

$$b = \frac{21}{22}a.$$

$$\therefore 4a - 3 \times \frac{21}{22}a < 0,$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore ax > b,$$

$$\therefore x < \frac{b}{a}, x < \frac{\frac{21}{22}a}{a},$$

$$\therefore x < \frac{21}{22}.$$

【标注】【知识点】由一个已知不等式的解集求另一个不等式的解集

10. 已知 a 、 b 为常数，若 $ax + b > 0$ 的解集是 $x < \frac{1}{4}$ ，则 $bx - a < 0$ 的解集是（ ）。

A. $x > -4$

B. $x < -4$

C. $x > 4$

D. $x < 4$

【答案】B

【解析】 $\because ax + b > 0$ 的解集 $x < \frac{1}{4}$ ，

$$\therefore x < -\frac{b}{a},$$

$$\text{则 } -\frac{b}{a} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\text{又 } \because a = -4b,$$

$$\therefore b > 0,$$

$$\therefore bx - a < 0,$$

$$\therefore bx + 4b < 0,$$

$$\therefore x + 4 < 0,$$

$$\therefore x < -4.$$

【标注】【知识点】由一个已知不等式的解集求另一个不等式的解集

11. 若关于 x 的不等式 $mx - n > 0$ 的解集是 $x < \frac{1}{5}$ ，则关于 x 的不等式 $(m + n)x > n - m$ 的解集是（ ）。

A. $x > -\frac{2}{3}$

B. $x < -\frac{2}{3}$

C. $x < \frac{2}{3}$

D. $x > \frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】 $\because$ 关于 x 的不等式 $mx - n > 0$ 的解集是 $x < \frac{1}{5}$ ，

$$\therefore m < 0, \frac{n}{m} = \frac{1}{5},$$

$$\text{解得 } m = 5n,$$

$$\therefore n < 0,$$

$\therefore$ 解关于 x 的不等式 $(m + n)x > n - m$ 得

$$x < \frac{n - m}{m + n},$$

$$\therefore x < \frac{n - 5n}{5n + n} = -\frac{2}{3}.$$

故选B。

【标注】【知识点】由一个已知不等式的解集求另一个不等式的解集

3. 含参整数解问题

例题6

已知不等式 $3x - a \leq 0$ 的正整数解只有 1, 2, 3, 4, 那么 a 的取值范围是_____.

解：解不等式得： $x \leq \frac{a}{3}$.

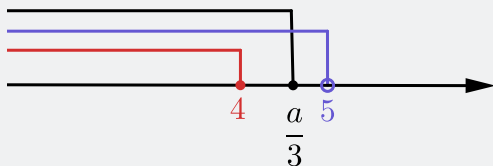
$\therefore \frac{a}{3}$ _____

$\therefore$ _____

【教法备注】

已知不等式 $3x - a \leq 0$ 的正整数解只有 1, 2, 3, 4, 那么 a 的取值范围是_____.

解：解不等式得： $x \leq \frac{a}{3}$.



$$\therefore 4 \leq \frac{a}{3} < 5 .$$

$$\therefore 12 \leq a < 15 .$$

注：这部分内容在讲解时可以引导学生利用数轴进行求解，此外要注意左右两侧能否取等号的情况。

【重点强调】

先解不等式；再标整数点；大致定区间；最后试边界。

- ① 先解不等式：按常规方法解出不等式的解集；
- ② 再标整数点：利用数轴，把整数点按个数标出；
- ③ 大致定区间：通过画图，确定不等式的解集要落在哪两个整数之间；
- ④ 最后试边界：不等式解出答案后，判断哪边的结果带等号。

练习6

12. 若关于 x 的不等式 $3x - a + 1 > 0$ 的最小整数解是 3, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $7 \leq a < 10$

【解析】解不等式 $3x - a + 1 > 0$, $x > \frac{a-1}{3}$,

$\therefore$ 不等式有最小整数解3,

$$\therefore 2 \leq \frac{a-1}{3} < 3,$$

解得: $7 \leq a < 10$.

【标注】【知识点】由不等式(组)的整数解情况求参数范围

13. 若关于 x 的不等式 $2x - m \leq 0$ 的正整数解只有4个, 则 m 的取值范围是 ().

A. $8 < m < 10$

B. $8 \leq m < 10$

C. $8 \leq m \leq 10$

D. $8 < m \leq 10$

【答案】B

【解析】由 $2x - m \leq 0$,

$$\text{得: } x \leq \frac{m}{2},$$

由于不等式 $2x - m \leq 0$ 的正整数解只有4个,

$$\text{所以 } 4 \leq \frac{m}{2} < 5.$$

解得: $8 \leq m < 10$.

【标注】【知识点】由不等式(组)的整数解情况求参数范围

14. 已知不等式 $2x - m < 3(x + 1)$ 的负整数解只有四个, 则 m 的取值范围是 _____.

【答案】 $1 < m \leq 2$

【解析】去括号, 得: $2x - m < 3x + 3$,

移项, 得: $2x - 3x < 3 + m$,

合并同类项, 得: $-x < 3 + m$,

系数化为1, 得: $x > -3 - m$,

$\therefore$ 不等式的负整数解只有四个,

$$\therefore -5 \leq -3 - m < -4,$$

解得: $1 < m \leq 2$.

【标注】【知识点】由不等式(组)的整数解情况求参数范围

三、含参不等式的最值问题

|| 例题7

已知三个非负数 a, b, c 满足 $2a + b - 3c = 2$, $3a + 2b - c = 5$. 若 $m = 3a + b - 5c$, 则 m 的最小值为 _____ .

解:
$$\begin{cases} 2a + b - 3c = 2 & \text{①} \\ 3a + 2b - c = 5 & \text{②} \end{cases}, \quad \text{①} \times 2: 4a + 2b = 6c + 4 \quad \text{③}, \quad \text{由②得: } 3a + 2b = 5 + c$$

④, $\text{③} - \text{④}: a = 5c - 1$ ⑤, 将⑤代入①: $10c - 2 + b - 3c = 2, \quad b = 4 - 7c. \quad \therefore a, b, c$ 均

为非负数, $\therefore \begin{cases} 5c - 1 \geq 0 \\ 4 - 7c \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases}, \quad \therefore \begin{cases} c \geq \frac{1}{5} \\ c \leq \frac{4}{7} \\ c \geq 0 \end{cases}, \quad \therefore \frac{1}{5} \leq c \leq \frac{4}{7}. \quad \therefore m = 3a + b - 5c, \quad \therefore$

$m = 15c - 3 + 4 - 7c - 5c = 3c + 1, \quad \therefore \text{当} c = \frac{1}{5} \text{时}, m \text{最小为} \frac{1}{5} \times 3 + 1 = \frac{8}{5}.$

【教法备注】

1. 由不等式可知:

$x \geq a$ 无最大值, 但有最小值为 a ; $x \leq a$ 无最小值, 但有最大值为 a ; $x > a$ 或 $x < a$ 既无最大值, 也无最小值.

2. 这种题目中一般含有多个字母, 解题时的步骤如下:

- ①将其他字母用某一个字母表示出来;
- ②用换元法将表示出来的其他字母代入, 转换成只有一个字母的式子;
- ③利用题目给出的条件, 判断出字母的取值范围;
- ④根据该字母的范围求出式子的取值范围.

|| 练习7

15. 已知实数 x, y 满足 $x + 2y = 4$, 并且 $x \leq 3, y \leq 2$. 求 $x - 2y$ 的最大值和最小值.

【答案】最小值为 -4 , 最大值为 2 .

【标注】【知识点】不等式的性质

【能力】运算能力

16. 已知实数 x, y, z 满足 $x - y = 3, x + z = 6$, 若 $x \geq -2y$, 则 $x + y + z$ 的最小值为 _____ .

【答案】5

【解析】由 $x - y = 3, x + z = 6$ 可得 $y = x - 3, z = 6 - x$.

$$\therefore x + y + z = x + x - 3 + 6 - x = x + 3,$$

$$\therefore x \geq -2y,$$

$$\therefore x \geq -2(x - 3),$$

$$\therefore x \geq -2x + 6,$$

$$\therefore 3x \geq 6,$$

$$\therefore x \geq 2,$$

$$\therefore x + y + z = x + 3 \geq 2 + 3,$$

$$\therefore x + y + z \geq 5.$$

所以 $x + y + z$ 的最小值是 5 .

故答案为 5 .

【标注】【知识点】不等式的性质

17. 已知： $6a = 3b + 12 = 2c$ ，且 $b \geq 0$ ， $c \leq 9$ ，则 $a - 3b + c$ 的最小值为 _____ .

【答案】 6

【解析】 $\therefore 6a = 3b + 12 = 2c$,

$$\therefore 3b = 6a - 12, c = 3a,$$

$$\therefore a - 3b + c = a - (6a - 12) + 3a = -2a + 12,$$

$$\therefore b \geq 0, c \leq 9,$$

$$\therefore 6a - 12 \geq 0, 3a \leq 9,$$

$$\therefore 2 \leq a \leq 3.$$

$$\therefore -b \leq -2a \leq -4,$$

$$\therefore 6 \leq -2a + 12 \leq 8,$$

$$\text{即 } 6 \leq a - 3b + c \leq 8,$$

$$\therefore a - 3b + c \text{ 的最小值为 } 6.$$

【标注】【知识点】不等式的性质

18. 若 $\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 3x + y - z = 50 \end{cases}$ ， x 、 y 、 z 均为非负整数，则 $M = 5x + 4y + 2z$ 的取值范围是 () .

A. $100 \leq M \leq 110$ B. $110 \leq M \leq 120$ C. $120 \leq M \leq 130$ D. $130 \leq M \leq 140$

【答案】 C

【解析】 $\therefore$ 将原方程组化为 $\begin{cases} x+y=30-z \\ 3x+y=50+z \end{cases}$, $\therefore$ 解得 $\begin{cases} x=z+10 \\ y=20-2z \end{cases}$,

$$\therefore M = 5(z+10) + 4(20-2z) + 2z = -z + 130,$$

又 $\because x, y, z$ 均为非负整数,

$$\therefore \begin{cases} z+10 \geq 0 \\ 20-2z \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}, \text{解得 } 0 \leq z \leq 10$$

$$\text{而 } M = -z + 130,$$

$$\therefore 120 \leq M \leq 130.$$

【标注】【知识点】解三元一次方程组

独步天下

19. 同时满足 $a+b+c=0$, $a>b>c$, 则 $\frac{c}{a}$ 的取值范围是 _____.

【答案】 $-2 < \frac{c}{a} < -\frac{1}{2}$

【解析】 $\because a+b+c=0$, $a>b>c$,

$$\therefore a>0, c<0, a+c+c<0, a+a+c>0,$$

$$\therefore -2 < \frac{c}{a} < -\frac{1}{2}.$$

【标注】【知识点】一元一次不等式组的解集